Varianta 100

Subiectul I.

a) $OA=\sqrt{5}$.

b) $2x+4y-5=0$.

c) $a\in\{-2,2\}$.

d) $x^2+y^2-5=0$.

e) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6\cdot i^7=1$.

f) $\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=1$.

Subiectul II.

1.

a) Probabilitatea cerută este $p=\frac{1}{2}$.

b) Se obțin: $a=1$, $b=3$, $c=5$

c) $x=2$.

d) $x=2$.

e) $y_V=-4$.

2.

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$

b) $f'(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

c) Dreapta $d_1: y=-\frac{\pi}{2}$ este asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției, iar dreapta $d_2: y=\frac{\pi}{2}$ este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

e) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$.

Subiectul III.

a) Se verifică prin calcul direct că $A^2=B^2=I_3$.

b) $\det(A)=-1$, $\operatorname{rang}(A)=3$.

c) Deoarece $B^2=B\cdot B=I_3$, matricea B este inversabilă, inversa sa fiind $B^{-1}=B$.

d) Avem $AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -7\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, aşadar $AB\neq BA$.

e) Notăm $C=BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Se demonstrează prin inducție, folosind ipoteza, că

$\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, există $a_n, b_n, c_n, d_n\in\mathbf{R}$ astfel încât $C^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_n & b_n\\ 0 & c_n & d_n\end{pmatrix}$.

Aşadar pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n\\ b_{n+1}=7a_n+4b_n\end{cases}$.

Cum $a_1=2>0$ şi $b_1=7>0$, se arată prin inducție că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $a_n>0$ şi $b_n>0$.
Deoarece $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $b_n\neq 0$, deducem că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $C^n\neq I_3$.

f) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, considerăm matricele $X_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, pentru care $X_n^2=I_3$.

Aşadar ecuația $X^2=I_3$ are o infinitate de soluții, deci cel puțin 2007.
g) În grupul $\left(Gl_3(\mathbf{R}),\cdot\right)$ al matricelor inversabile de ordinul 3 cu coeficienți reali, avem $A, B\in Gl_3(\mathbf{R})$, $A^2=B^2=I_3$ şi matricea BA are ordinul infinit, deoarece la punctul **e)** am demonstrat că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $(BA)^n\neq I_3$.

Subiectul IV.
a) $g'(x)=a^x\cdot\ln a+6^x\cdot\ln 6-3^x\cdot\ln 3-4^x\cdot\ln 4$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.
b) $g'(0)=\ln\frac{a}{2}$, iar $g(0)=0$.
c) Deoarece $f(x)=\left(3^x-2^x\right)\left(2^x-1\right)$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, rezultă concluzia.
d) Avem că $x=0$ este punctul de extrem global al funcției g şi din teorema lui Fermat, rezultă că $g'(0)=0$, adică $\ln\frac{a}{2}=0$, deci $a=2$.
Pentru $a=2$, funcția g coincide cu funcția f, pentru care am arătat la punctul **c)** că $f(x)\geq 0=f(0)$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.
e) Se demonstrează prin inducție, folosind ipoteza.
f) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$, considerăm funcția $\alpha:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $\alpha(x)=x^n$.
Funcția α este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $\alpha'(x)=nx^{n-1}$, $\forall\, x>0$.

Pentru $p, q, r, s \in \mathbf{R}$, cu $0 < p < q < r < s$ şi $p + s = r + q$, funcția α este o funcție Rolle pe fiecare dintre intervalele $[p, q]$ şi $[r, s]$, deci, conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (p, q)$ şi $d \in (r, s)$, cu $\dfrac{q^n - p^n}{q - p} = n \cdot c^{n-1}$ şi $\dfrac{s^n - r^n}{s - r} = n \cdot d^{n-1}$.

Deoarece $n - 1 \geq 1$ şi $0 < c < d$, obținem $n \cdot c^{n-1} < n \cdot d^{n-1}$, adică $\dfrac{q^n - p^n}{q - p} < \dfrac{s^n - r^n}{s - r}$

şi cum avem $q - p = s - r$, rezultă $q^n - p^n < s^n - r^n$, deci $p^n + s^n > r^n + q^n$.

g) Pentru $x \in \mathbf{R}$ avem $f^{(n)}(x) \overset{\text{e)}}{=} 2^x (\ln 2)^n + 6^x (\ln 6)^n - 3^x (\ln 3)^n - 4^x (\ln 4)^n$,
deci $f^{(n)}(0) = (\ln 2)^n + (\ln 6)^n - (\ln 3)^n - (\ln 4)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.
Pentru $p = \ln 2$, $q = \ln 3$, $r = \ln 4$ şi $s = \ln 6$, avem $0 < p < q < r < s$ şi
$p + s = \ln 2 + \ln 6 = \ln 12 = \ln 4 + \ln 3 = r + q$ şi din **f)** rezultă
$(\ln 2)^n + (\ln 6)^n > (\ln 3)^n + (\ln 4)^n$, adică $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.